



Starting from the following 9 _ 9 proximity-relation R(0). Assume now = 0,75.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0,7	0,5	0,4	0,3	0,4	0,9	0,1	0,2
2	0,7	1	0,6	0,8	0,7	0,7	0,3	0,6	0,1
3	0,5	0,6	1	0,2	0,1	0,1	0,4	0,2	0,8
4	0,4	0,8	0,2	1	0,9	0,9	0,6	0,8	0,2
5	0,3	0,7	0,1	0,9	1	0,9	0,3	0,8	0,1
6	0,4	0,7	0,1	0,9	0,9	1	0,3	0,8	0,2
7	0,9	0,3	0,4	0,6	0,3	0,3	1	0,3	0,2
8	0,1	0,6	0,2	0,8	0,8	0,8	0,3	1	0,1
9	0,2	0,1	0,8	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	1

Similarity-relation R will be calculated as Max Min:

Other than (i) *max-min* formula

$$\mu_R(x, y) = \max_{z \in X} \{ \min \{ \mu_R(x, z), \mu_R(z, y) \} \}$$

R1:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0,7	0,5	0,4	0,3	0,4	0,9	0,1	0,2
2	0,7	1	0,6	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0,2
3	0,5	0,6	1	0,4	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8
4	0,4	0,8	0,4	1	0,9	0,9	0,6	0,8	0,2
5	0,3	0,7	0,3	0,9	1	0,9	0,3	0,8	0,2
6	0,4	0,7	0,4	0,9	0,9	1	0,4	0,8	0,2
7	0,9	0,7	0,5	0,6	0,3	0,4	1	0,3	0,2
8	0,1	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	0,3	1	0,1
9	0,2	0,2	0,8	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	1

R2:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0,7	0,5	0,4	0,3	0,4	0,9	0,1	0,2
2	0,7	1	0,6	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0,2
3	0,5	0,6	1	0,4	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8
4	0,4	0,8	0,4	1	0,9	0,9	0,6	0,8	0,2
5	0,3	0,7	0,3	0,9	1	0,9	0,3	0,8	0,2
6	0,4	0,7	0,4	0,9	0,9	1	0,4	0,8	0,2
7	0,9	0,7	0,5	0,6	0,3	0,4	1	0,3	0,2
8	0,1	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	0,3	1	0,1
9	0,2	0,2	0,8	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	1

R3:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0,7	0,5	0,4	0,3	0,4	0,9	0,1	0,2
2	0,7	1	0,6	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0,2
3	0,5	0,6	1	0,4	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8
4	0,4	0,8	0,4	1	0,9	0,9	0,6	0,8	0,2
5	0,3	0,7	0,3	0,9	1	0,9	0,3	0,8	0,2
6	0,4	0,7	0,4	0,9	0,9	1	0,4	0,8	0,2
7	0,9	0,7	0,5	0,6	0,3	0,4	1	0,3	0,2
8	0,1	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	0,3	1	0,1
9	0,2	0,2	0,8	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	1

Now apply [1.] and [2.] for Max Min

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0,7	0	0	0	0	0,9	0	0
2	0,7	0	0,6	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0
3	0	0,6	0	0	0	0	0	0,6	0,8
4	0	0,8	0	0	0,9	0,9	0,6	0,8	0
5	0	0,7	0	0,9	0	0,9	0	0,8	0
6	0	0,7	0	0,9	0,9	0	0	0,8	0
7	0,9	0,7	0	0,6	0	0	0	0,6	0
8	0	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	0,6	0	0
9	0	0	0,8	0	0	0	0	0	0

[3] Now $a_{71} = a_{54} = a_{64} = a_{65} = 0,9$ are maximum and a_{54} is randomly selected. Then $C = \{5; 4\}$.

[4] $a_{56} + a_{46} = 1,8$ are maximum and $j = 6$ is randomly selected. Then $C = \{5; 4; 6\}$.

[4] $a_{58} + a_{68} + a_{48} = 2,4$ are maximum and $j = 8$ is randomly selected. Then

$C = \{5; 4; 6; 8\}$.

[4] There are no j so that $a_{1j} + a_{2j} + a_{4j} + a_{8j}$ attain maximum. Then final $C = \{5; 4; 6; 8\}$.

[5] Let $I = I \setminus C = \{1; 2; 3; 7; 9\}$

[3] Now $a_{71} = a_{54} = a_{64} = a_{65} = 0,9$ are maximum and a_{17} is randomly selected. Then $C = \{1; 7\}$.

[4] There are no j so that $a_{1j} + a_{2j} + a_{4j} + a_{8j}$ attain maximum. Then final $C = \{1; 7\}$.

[5] Let $I = I \setminus C = \{2; 3; 9\}$

[3] Now $a_{39} = a_{93} = 0,8$ are maximum and a_{39} is randomly selected. Then $C = \{3; 9\}$.

[4] There are no j so that $a_{1j} + a_{2j} + a_{4j} + a_{8j}$ attain maximum. Then final $C = \{3; 9\}$.

[5] Let $I = I \setminus C = \{2\}$

[3] Now $a_{22} = 0$. Then $\{2\}$ are three separated clusters.

In this way, when $\alpha = 0,75$, we have 4 clusters $\{3; 9\}; \{1; 7\}; \{5; 4; 6; 8\}; \{2\}$ are obtained.

For Max Min

Assume now $\alpha = 0,75$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0,9	0	0
2	0	0	0	0,8	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8
4	0	0,8	0	0	0,9	0,9	0	0,8	0
5	0	0	0	0,9	0	0,9	0	0,8	0
6	0	0	0	0,9	0,9	0	0	0,8	0
7	0,9	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0,8	0,8	0,8	0	0	0
9	0	0	0,8	0	0	0	0	0	0

Similarity-relation R will be calculated as Max Prod method:

(ii) *max-prod*

$$\mu_R(x, y) = \max_{z \in X} \{ \mu_R(x, z) R(z, y) \}$$

R1:

R2:

1	0,7	0,5	0,4	0,3	0,4	0,9	0,1	0,2
0,7	1	0,6	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0,2
0,5	0,6	1	0,4	0,42	0,42	0,5	0,6	0,8
0,4	0,8	0,48	1	0,9	0,9	0,6	0,8	0,2
0,3	0,7	0,42	0,9	1	0,9	0,3	0,8	0,2
0,4	0,7	0,42	0,9	0,9	1	0,4	0,8	0,2
0,9	0,7	0,5	0,6	0,3	0,4	1	0,6	0,2
0,1	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	0,6	1	0,1
0,2	0,2	0,8	0,2	0,24	0,32	0,2	0,12	1

1	0,7	0,5	0,4	0,3	0,4	0,9	0,1	0,2
0,7	1	0,6	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0,2
0,5	0,6	1	0,4	0,42	0,42	0,5	0,6	0,8
0,4	0,8	0,48	1	0,9	0,9	0,6	0,8	0,2
0,3	0,7	0,42	0,9	1	0,9	0,3	0,8	0,2
0,4	0,7	0,42	0,9	0,9	1	0,4	0,8	0,2
0,9	0,7	0,5	0,6	0,3	0,4	1	0,6	0,2
0,1	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	0,6	1	0,1
0,2	0,2	0,8	0,2	0,34	0,34	0,2	0,12	1

R3:

1	0,7	0,5	0,4	0,3	0,4	0,9	0,1	0,2
0,7	1	0,6	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0,2
0,5	0,6	1	0,4	0,42	0,42	0,5	0,6	0,8
0,4	0,8	0,48	1	0,9	0,9	0,6	0,8	0,2
0,3	0,7	0,42	0,9	1	0,9	0,3	0,8	0,2
0,4	0,7	0,42	0,9	0,9	1	0,4	0,8	0,2
0,9	0,7	0,5	0,6	0,3	0,4	1	0,6	0,2
0,1	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8	0,6	1	0,1
0,2	0,2	0,8	0,2	0,34	0,34	0,2	0,12	1

Now apply [1.] and [2.] for Max Prod

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0,9	0	0
2	0	0	0	0,8	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8
4	0	0,8	0	0	0,9	0,9	0	0,8	0
5	0	0	0	0,9	0	0,9	0	0,8	0
6	0	0	0	0,9	0,9	0	0	0,8	0
7	0,9	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0,8	0,8	0,8	0	0	0
9	0	0	0,8	0	0	0	0	0	0

[3] Now $a_{71} = a_{54} = a_{64} = a_{65} = 0,9$ are maximaum and a_{56} is randomly selected. Then $C = \{5; 6\}$.

[4] $a_{54} + a_{64} = 1,8$ are maximum and $j = 4$ is randomly selected. Then $C = \{4; 5; 6\}$.

[4] $a_{58} + a_{68} + a_{48} = 2,4$ are maximum and $j = 8$ is randomly selected. Then $C = \{4; 5; 6; 8\}$.

[4] There are no j so that $a_{1j} + a_{2j} + a_{4j} + a_{8j}$ attain maximum. Then final $C = \{4; 5; 6; 8\}$.

[5] Let $I = \mathbb{N}C = \{ 1; 2; 3; 7; 9\}$

[3] Now $a_{71} = a_{54} = a_{64} = a_{65} = 0,9$ are maximaum and a_{17} is randomly selected. Then $C = \{1; 7\}$.

[4] There are no j so that $a_{1j} + a_{2j} + a_{4j} + a_{8j}$ attain maximum. Then final $C = \{1; 7\}$.

[5] Let $I = \mathbb{N}C = \{2; 3; 9\}$

[3] Now $a_{39} = a_{93} = 0,8$ are maximum and a_{39} is randomly selected. Then $C = \{3; 9\}$.

[4] There are no j so that $a_{1j} + a_{2j} + a_{4j} + a_{8j}$ attain maximum. Then final $C = \{3; 9\}$.

[5] Let $I = I \setminus C = \{2\}$

[3] Now $a_{22} = 0$. Then $\{2\}$ are three separated clusters.

In this way, when $\alpha = 0,75$, we have 4 clusters $\{2\}; \{1; 7\}; \{3; 9\}; \{5; 4; 6; 8\}$; are obtained.

For Max Prod

Assume now $\alpha = 0,75$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0,9	0	0
2	0	0	0	0,8	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0,8
4	0	0,8	0	0	0,9	0,9	0	0,8	0
5	0	0	0	0,9	0	0,9	0	0,8	0
6	0	0	0	0,9	0,9	0	0	0,8	0
7	0,9	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0,8	0,8	0,8	0	0	0
9	0	0	0,8	0	0	0	0	0	0

Similarity-relation R will be calculated as Max AVG method:

(iii) *max-avg*

$$\mu_R(x, y) = \max_{z \in X} \{(\mu_R(x, z) + \mu_R(z, y))/2\}$$

R1:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,9	0,75	0,7	0,65	0,7	0,95	0,55	0,6	0,85
2	0,85	1	0,8	0,9	0,85	0,85	0,85	0,8	0,6
3	0,75	0,8	1	0,7	0,71	0,71	0,75	0,8	0,9
4	0,7	0,9	0,74	1	0,95	0,95	0,8	0,9	0,6
5	0,65	0,9	0,71	0,95	1	0,95	0,65	0,9	0,6
6	0,7	0,9	0,71	0,95	0,95	1	0,7	0,9	0,6
7	0,95	0,9	0,75	0,8	0,65	0,7	1	0,8	0,6
8	0,55	0,8	0,8	0,9	0,9	0,9	0,8	1	0,55
9	0,6	0,6	0,9	0,6	0,67	0,67	0,6	0,56	1

R2:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,9	0,88	0,85	0,83	0,85	0,98	0,78	0,8	0,925
2	0,925	1	0,9	0,95	0,93	0,93	0,93	0,9	0,8
3	0,875	0,9	1	0,85	0,86	0,86	0,88	0,9	0,95
4	0,85	1	0,87	1	0,98	0,98	0,9	0,95	0,8
5	0,825	0,9	0,86	0,975	1	0,98	0,83	0,95	0,8
6	0,85	0,9	0,86	0,975	0,98	1	0,85	0,95	0,8
7	0,975	0,9	0,88	0,9	0,83	0,85	1	0,9	0,8
8	0,775	0,9	0,9	0,95	0,95	0,95	0,9	1	0,78
9	0,8	0,8	0,95	0,8	0,83	0,83	0,8	0,78	1

R3:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0,94	0,925	0,91	0,93	0,99	0,89	0,9	0,963
2	0,963	1	0,95	0,975	0,96	0,96	0,96	0,95	0,9
3	0,938	1	1	0,925	0,93	0,93	0,94	0,95	0,98
4	0,925	1	0,94	1	0,99	0,99	0,95	0,98	0,9
5	0,913	1	0,93	0,988	1	0,99	0,91	0,98	0,9
6	0,925	1	0,93	0,988	0,99	1	0,93	0,98	0,9
7	0,988	1	0,94	0,95	0,91	0,93	1	0,95	0,9
8	0,888	1	0,95	0,975	0,98	0,98	0,95	1	0,89
9	0,9	0,9	0,98	0,9	0,92	0,92	0,9	0,89	1

R4:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0,97	0,963	0,96	0,96	0,99	0,94	0,95	0,981
2	0,981	1	0,98	0,988	0,98	0,98	0,98	0,98	0,95
3	0,969	1	1	0,963	0,96	0,96	0,97	0,98	0,99
4	0,963	1	0,97	1	0,99	0,99	0,98	0,99	0,95
5	0,956	1	0,96	0,994	1	0,99	0,96	0,99	0,95
6	0,963	1	0,96	0,994	0,99	1	0,96	0,99	0,95
7	0,994	1	0,97	0,975	0,96	0,96	1	0,98	0,95
8	0,944	1	0,98	0,988	0,99	0,99	0,98	1	0,94
9	0,95	1	0,99	0,95	0,96	0,96	0,95	0,95	1

R5:

R6:

1	1	0,98	0,981	0,98	0,98	1	0,97	0,98
0,991	1	0,99	0,994	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98
0,984	1	1	0,981	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99
0,981	1	0,98	1	1	1	0,99	0,99	0,98
0,978	1	0,98	0,997	1	1	0,98	0,99	0,98
0,981	1	0,98	0,997	1	1	0,98	0,99	0,98
0,997	1	0,98	0,988	0,98	0,98	1	0,99	0,98
0,972	1	0,99	0,994	0,99	0,99	0,99	1	0,97
0,975	1	0,99	0,975	0,98	0,98	0,98	0,97	1

R7:

1	1	1	0,995	0,99	1	1	0,99	0,99
0,998	1	1	0,998	1	1	1	1	0,99
0,996	1	1	0,995	1	1	1	1	1
0,995	1	1	1	1	1	1	1	0,99
0,995	1	1	0,999	1	1	0,99	1	0,99
0,995	1	1	0,999	1	1	1	1	0,99
0,999	1	1	0,997	0,99	1	1	1	0,99
0,993	1	1	0,998	1	1	1	1	0,99
0,994	1	1	0,994	0,99	0,99	0,99	0,99	1

R8:

1	1	1	0,998	1	1	1	1	1
0,999	1	1	0,999	1	1	1	1	1
0,998	1	1	0,998	1	1	1	1	1
0,998	1	1	1	1	1	1	1	1
0,997	1	1	1	1	1	1	1	1
0,998	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0,998	1	1	1	1	1
0,996	1	1	0,999	1	1	1	1	1
0,997	1	1	0,997	1	1	1	1	1

R9:

1	1	1	0,998	1	1	1	1	1
0,999	1	1	0,999	1	1	1	1	1
0,998	1	1	0,998	1	1	1	1	1
0,998	1	1	1	1	1	1	1	1
0,997	1	1	1	1	1	1	1	1
0,998	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0,998	1	1	1	1	1
0,996	1	1	0,999	1	1	1	1	1
0,997	1	1	0,997	1	1	1	1	1

R10:

1	1	1	0,999	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0,999	1	1	1	1	1
0,999	1	1	1	1	1	1	1	1
0,999	1	1	1	1	1	1	1	1
0,999	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0,999	1	1	1	1	1	1	1	1
0,999	1	1	0,999	1	1	1	1	1