Экспериментальная реализация квантового алгоритма

Айзек Л. Чуанг
(Isaac L. Chuang)[1]

Ливен М. К. Вандерсипен, Ксинлан Жу
(Lieven M. K. Vandersypen, Xinlan Zhou)[2]

Дебби В. Леюнг
(Debbie W. Leung)[3]

Сет Ллойд
(Seth Lloyd)[4]

Квантовый компьютер — это устройство, обрабатывающее информацию квантово-механическим когерентным способом [1–5]. В принципе, можно использовать когерентную квантовую интерференцию, чтобы осуществлять такие вычисления, как разложение больших чисел на множители или поиск в несортированной базе данных, более быстро, нежели классические компьютеры [1, 2, 6–8]. Шумы, некогерентность и технические трудности делают сложным построение крупномасштабных квантовых компьютеров [9–13]. Ионные ловушки и оптическое резонаторы являются многообещающими с точки зрения экспериментальных подходов [14, 15], но еще ни один квантовый алгоритм не был реализован на таких системах.

С другой стороны, из-за естественной изоляции от окружающей среды, ядерные спины являются особенно хорошими «квантовыми битами» [16], и их использование для квантовых вычислений возможно посредством ядерного магнитного резонанса (ЯМР) [17–19]. В настоящей статье мы описываем экспериментальную реализацию квантового алгоритма с использованием ЯМР для решения чисто математической задачи за меньшее количество шагов, чем это возможно классически.

[1]IBM Almaden Research Center K10/D1, San Jose, CA 95120.
[2]Solid State Electronics Laboratory, Stanford University, Stanford, CA 94305.
[3]Edward L. Ginzton Laboratory, Stanford, CA 94305.
[4]MIT Dept. of Mechanical Engineering, Cambridge, Mass. 02139.

Перевод А. И. Дубиковского.

В частности, наш простой квантовый компьютер может определить общие свойства неизвестной функции, используя меньшее количество вызовов функции, нежели при использовании классического компьютера.

Мы осуществили самую простую возможную версию квантового алгоритма Дойча–Джозса (Deutsch–Jozsa, D–J) [6], который определяет, является ли неизвестная функция постоянной или сбалансированной. Постоянная функция $f(x)$ от N битов до одного либо $f(x) = 0$ для всех x, либо $f(x) = 1$ для всех x. Сбалансированная функция $f(x) = 0$ для точно половины ее аргументов, и $f(x) = 1$ для оставшихся. Чтобы с уверенностью определить, является ли функция постоянной или сбалансированной, на детерминированном классическом компьютере требуется до $2^{N-1} + 1$ вызовов функции: даже если взять половину аргументов и найти $f(x) = 0$ для каждого, все еще нельзя с уверенностью заключить, что функция постоянна. Напротив, D–J алгоритм, усовершенствованный Р. Кливом и др. [20] и Аланом Таппом, позволяет квантовому компьютеру определять, является ли $f(x)$ постоянной или сбалансированной, используя только один вызов функции.

D–J алгоритм хорошо иллюстрируется его самым простым возможным случаем, когда f преобразует один бит в другой; это тот случай, который мы реализовали (это также самый простой случай алгоритма Саймона [7]). Имеется четыре возможных значения f, два из которых постоянны, $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1$ а оставшиеся два имеют равное число 0 и 1 значений: $f_3(x) = x$, $f_4(x) = \mathrm{NOT}\ x$. Выяснение, является ли такая функция постоянной или сбалансированной, аналогично задаче, является ли монета настоящей — с орлом на одной стороне и решкой на другой, или фальшивой — с орлом на двух сторонах. В классическом случае нужно смотреть на монету дважды: сначала на одну сторону, затем на другую, чтобы определить — настоящая это монета или фальшивая. D–J алгоритм использует квантовую когерентность, чтобы определить, является ли квантовая «монета» настоящей или фальшивой, посмотрев на нее только один раз. Алгоритм требует одного «входящего» спина и одного «рабочего» спина, и схематично представлен на рис. 1.

Экспериментально этот квантовый алгоритм был осуществлен с использованием ядерных спинов атомов ^{1}H и ^{13}C в помеченных углеродом-13 молекулах хлороформа ($CHCl_3$) как входящий и рабочий квантовый бит («кубит»). $|0\rangle$ ($|1\rangle$) описывает состояние спина, направленного по (против) внешнему сильному статическому магнитному полю $\mathbf{B}_0$ в $+\widehat{z}$ направлении. Упрощенный гамильтониан для такой

2-спиновой системы в хорошем приближении ($\hbar = 1$) равен [21]

$$\widehat{\mathscr{H}} = -\omega_A \widehat{I}_{zA} - \omega_B \widehat{I}_{zB} + 2\pi J \widehat{I}_{zA} \widehat{I}_{zB} + \widehat{\mathscr{H}}_{env}\,. \tag{1}$$

Первые два члена описывают свободную прецессию спина A (^{1}H) и B (^{13}C) относительно $-\mathbf{B}_0$ с частотами $\omega_A/2\pi \approx 500$ МГц и $\omega_B/2\pi \approx$ ≈ 125 МГц. $\widehat{I}_{zA}$ — оператор углового момента в $+\widehat{z}$ направлении для A. Третий член описывает скалярное спин-спиновое взаимодействие $J \approx$ ≈ 215 Гц. $\widehat{\mathscr{H}}_{env}$ описывает взаимодействие с окружающей средой, включая взаимодействие с ядрами хлора, и также члены более высокого порядка в спин-спиновом взаимодействии, и этим членом, как будет описано ниже, можно пренебречь.

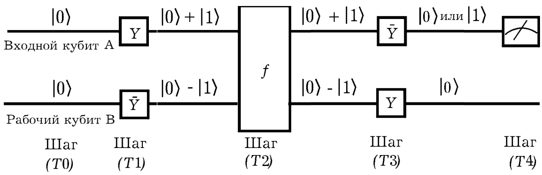

Рис. 1. Квантовая схема реализации D–J алгоритма. (T0) Начинаем с обоих «входящего» и «рабочего» кубитов (A и B) в состоянии $|0\rangle$. (T1) Выполняем преобразование Y: $|0\rangle \to \big(|0\rangle + |1\rangle\big)/2^{1/2}$, $|1\rangle \to \big(-|0\rangle + |1\rangle\big)/2^{1/2}$, $|0\rangle \to \big(|0\rangle + |1\rangle\big)/\sqrt{2}$, $|1\rangle \to \big(-|0\rangle + |1\rangle\big)/\sqrt{2}$, к A, и обратное преобразование $\bar{Y}$ к B, в итоге получаем состояние $\frac{1}{2}\sum\limits_{x=0}^{1}|x\rangle\,(|0\rangle - |1\rangle)$. Входящий кубит в некотором квантовом смысле регистрирует и 0 и 1 одновременно. (T2) Вызываем функцию: применяем f к A, и прибавляем результат к B по модулю 2. До тех пор, пока квантовые логические операции, необходимые для вычисления f, выполняются когерентно, рабочий кубит в некотором квантовом смысле теперь содержит значения f при всех возможных аргументах; это результат, названный Дойчем «квантовым параллелизмом» [1]. Два кубита находятся теперь в состоянии $\frac{1}{2}\sum\limits_{x=0}^{1}|x\rangle\,(|0 + f(x)\rangle - |1 + f(x)\rangle) =$ $= \frac{1}{2}\sum\limits_{x=0}^{1}(-1)^{f(x)}|x\rangle\,(|0\rangle - |1\rangle)$. (T3) Выполняем инверсию преобразования (T1), вследствие чего получаем кубиты в суперпозиции состояний. Если f постоянна, то множители $(-1)^{f(x)}$ есть либо все $+1$, либо все -1, и результат преобразования в этом шаге — состояние $\pm|00\rangle$. Если f является сбалансированной, то ровно половина множителей $(-1)^{f(x)}$ есть $+1$, и половина -1, и результат преобразования — состояние $\pm|10\rangle$. (T4) Читаем A. Если это 0, то f постоянная; если 1, то f сбалансированная.

Пять теоретических шагов квантового алгоритма, (T0)–(T4), были экспериментально осуществлены следующим образом:

(E0) Начальное состояние подготавливалось в 200 мМ, 0.5 мл хлороформа, растворенного в d6-ацетоне при комнатной температуре и стандартном давлении. $\mathcal{O}(10^{18})$ молекул в этом растворе, как можно думать, были независимыми простыми квантовыми компьютерами, работающими одновременно.

Теоретически, идеальный результат получается, когда спины во всех молекулах приготовлены в 00 состоянии. Поскольку эксперимент выполнялся при комнатной температуре, начальная матрица плотности ρ для системы в тепловом равновесии имеет заселенности $\mathrm{diag}(\rho) = [n_{00}, n_{01}, n_{10}, n_{11}]$ в $00, 01, 10$ и 11 состояниях соответственно, где ρ — матрица плотности, n_i пропорционально $e^{-E_i/kT}/2^N \approx (1 - E_i/kT)/2^N$ с энергией E_i состояния i, а $N = 2$ является числом кубитов, используемых в нашем эксперименте. Существует несколько методов для извлечения из такого состояния теплового равновесия только сигнала от 00 состояния [17,18]; мы использовали метод «временного усреднения» [22], который использует суммирование трех экспериментов, в которых заселенность из 01, 10 и 11 состояний циклически переставляется перед выполнением вычислений. Существенное наблюдение суть $[n_{00}, n_{01}, n_{10}, n_{11}] + [n_{00}, n_{11}, n_{01}, n_{10}] + [n_{00}, n_{10}, n_{11}, n_{01}] = \alpha[1,1,1,1] + \delta[1,0,0,0]$, где $\alpha = n_{01} + n_{10} + n_{11}$ — фоновый сигнал, который не детектируется, а $\delta = 3n_{00} - \alpha$ — отклонение от однородного фона, чей сигнал эффективно ведет себя подобно желаемому чистому квантовому состоянию $|00\rangle$. Перестановки выполнены с использованием метода, используемого для вычислений, описанных ниже. Этот метод избегает технических трудностей обнаружения сигнала от единственного ядерного спина и позволяет системе, дающей легко обнаружимый сигнал, используемый для квантового вычисления, оставаться при комнатной температуре.

Заметим, что в то время как этот метод требует вычисления $f(x)$ 3 раза, фактически это не является необходимым. Хотя шаг (T0) обусловлен исходным чистым состоянием $|00\rangle$, алгоритм работает также хорошо, если начальный входящий кубит $|1\rangle$; однако, когда рабочий кубит первоначально $|1\rangle$, это не очень хорошо, поскольку невозможно отличить константу от сбалансированной функции, но это не влияет на другие работающие компьютеры. Таким образом, тепловое состояние — хорошее начальное состояние для этого алгоритма, и нам необходимо выполнить только один эксперимент. Результаты с использованием теплового и чистого начальных состояний описаны ниже.

(E1) Импульсные радиочастотные электромагнитные поля (РЧ) используются для того, чтобы преобразовать кубиты, как это требуется в (T1). Эти поля, ориентированные в $\widehat{x} - \widehat{y}$ плоскости перпендикулярно $\mathbf{B}_0$, выборочно адресуются или A, или B, осциллируя с частотой ω_A или ω_B. Классически, РЧ импульс, направленный, к примеру, по $\widehat{y}$, вращает спин относительно этой оси на угол, пропорциональный $\approx tP$, т. е. произведению длительности t и мощности P импульса. В примитивной картине простых магнитов $\pi/2$ импульс вдоль $\widehat{y}$ (мы будем называть его Y) поворачивает $\widehat{z}$ ориентированный спин на 90°, к $\widehat{x}$ (аналогично, пусть $\bar{Y}$ вращает спин на $\pi/2$ относительно $-\widehat{y}$, и X — на $\pi/2$ относительно $\widehat{x}$, и т. д; нижние индексы будут, описывать над какими спинами эта операция производится). Это описание состояния является классическим в том смысле, что обыкновенный магнит всегда имеет определенное направление. Однако, в реальности спин ядра — квантовый объект, и вместо поворота в направлении $\widehat{x}$ он, фактически, является суперпозицией состояний вверх и вниз, $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Аналогично, спин, классически описываемый как находящийся по направлению $-\widehat{x}$, фактически находится в состоянии $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$. (E1) таким образом состоит из двух импульсов РЧ $Y_A\bar{Y}_B$.

(E2) Функция $y \to y \oplus f(x)$ осуществляется посредством использования РЧ-импульсов и спин-спинового взаимодействия. Напомним, что спин A представляет входящий кубит x, и B — рабочий кубит y, а f хранит свое значение. f_1 реализована как $\tau/2 - X_BX_B - \tau/2 - X_BX_B$ (читается слева направо), где $\tau/2$ представляет временной интервал $1/4J \approx 1.163$ мс, в течение которого происходит взаимодействие связанных спинов. Типичные длины импульсов были 10–15 мкс. Это — известная рефокусировка [23] импульсных последовательностей, которая реализует нужное действие. f_2 реализована как $\tau/2 - X_BX_B - \tau/2$, подобно f_1, но без последних импульсов, так что B инвертирован. f_3 есть $Y_B - \tau - \bar{Y}_BX_B - \bar{Y}_A\bar{X}_AY_A$, что осуществляет «контролируемое НЕ» действие, в котором B инвертирован тогда и только тогда, когда A находится в $|1\rangle$ состоянии. Для понимания можно использовать примитивную картину классических магнитов для случая начальных состояний 00 или 10 и последовательности импульсов $Y_B - \tau - X_B$ (заметим, что после (E1) оба спина не просто $|0\rangle$ или $|1\rangle$, но находятся в суперпозиции обоих состояний, и в этом случае необходимы дополнительные импульсы f_3 [17]). Сперва Y_B поворачивает B по $+\widehat{x}$. Затем B прецессирует в $\widehat{x}-\widehat{y}$ плоскости относительно $-\widehat{z}$. Из-за спин-спинового взаимодействия B прецессирует чуть медленнее (быстрее), если $A=0$ ($A=1$). После τ секунд B достигает $+\widehat{y}$ ($-\widehat{y}$) во вращающейся системе координат. X_B затем поворачивает B к $+\widehat{z}$ ($-\widehat{z}$), то есть к 0 или 1, где конечное состояние B зависит от начального A. Точное квантовое описание легко получается посредством перемножения унитарных матриц вращения. Наконец, f_4 осуществляется как $Y_B - \tau - \bar{Y}_B\bar{X}_B - \bar{Y}_A\bar{X}_A Y_A$, что похоже на f_3, но с инвертированным B.

(E3) Инверсия (E1) осуществляется посредством РЧ-импульсов $\bar{Y}_A Y_B$ для возвращения спинов к $\pm\widehat{z}$. Спин A, который был сначала $|0\rangle$, тем самым преобразуется в $|0\rangle$ или $|1\rangle$ соответственно для постоянной или сбалансированной функции.

(E4) Результат считывается посредством импульса X_A, возвращая спин A обратно в $\widehat{x}-\widehat{y}$ плоскость. Время изменения напряжения $V(t)$, вызванное прецессией спина A вокруг $-\mathbf{B}_0$, регистрируется фазочувствительной катушкой. Исследование спектра $V(t)$, после проведения одного эксперимента и соответствующего считывающего импульса немедленно показывает, является ли $f(x)$ постоянной или сбалансированной, как показано на рис. 2.

Мы также нашли всю матрицу плотности отклонений $\rho_\Delta \equiv \rho - \mathrm{Tr}(\rho)I/4$ (рис. 3), описывая конечное 2-кубитное состояние. Эти результаты однозначно доказывают полное правильное функционирование квантового алгоритма и дают анализ погрешностей, описываемый ниже.

Квантовое вычисление требует, чтобы когерентная суперпозиция сохранялась на продолжении всего вычисления. Для этого требуется хорошо изолированная квантовая система (с малым $\widehat{\mathscr{H}}_{env}$), и, к счастью, ядерные спины являются естественно хорошо изолированными от окружающей среды. Непостоянство фазы из-за неоднородности $\mathbf{B}_0$ было минимизировано посредством использования около 30 электромагнитов, чтобы статическое поле было постоянным примерно в одной из 10^9 частей всего объема используемого образца. Константы продольной и поперечной временной релаксации T_1 и T_2 были измерены с использованием стандартного обратного восстановления и последовательности импульсов Карра–Парселла–Мейбума–Гилла [23], что дало $T_1 \approx 19$ и 25 секунд и $T_2 \approx 7$ и 0.3 секунды, соответственно для протона и углерода; они были намного длиннее, чем требовалось для нашего эксперимента, который был завершен приблизительно за 7 миллисекунд.

Единственными наиболее существенными источниками погрешностей в эксперименте были неоднородность РЧ и несовершенство настройки длины импульса. Непосредственный критерий неоднородности — время экспоненциального убывания порядка ≈ 200 мкс одного импульса. С учетом смешения заселенностей, на каждое ядро действовало порядка 7 импульсов с кумулятивной продолжительностью $\approx 70 \div 100$ мкс.

Второй наиболее важный вклад в погрешность — низкое отношение «сигнал–шум» для углерода, отношение пик сигнала/RMS шум ≈ 35, тогда как для протона ≈ 4300. Сигнал от углерода был намного более слабым, поскольку для него гиромагнитное отношение в 4 раза меньше, и приемная катушка для углерода была установлена более далеко от рабочего образца. Меньшие вклады в погрешность давали неполное затухание между последовательными экспериментами, отклонения несущей частоты и численные погрешности при расчетах.

Недостатки такого маленького квантового компьютера были скорее во власти технологии, нежели чем в фундаментальных принципах. Однако, квантовые компьютеры на основе ЯМР более чем с 10 кубитами будут требовать новых подходов, поскольку с увеличением числа кубитов сила сигнала экспоненциально убывает в используемой схеме [24, 25]: для N спинов сигнал от начального состояния $00\ldots0$ пропорционален $n_{00\ldots0} \propto NZ^{-N}$, где при больших температурах функция $Z \approx 2$. Кроме того, временная когерентность естественно уменьшается для больших молекул, в то время как продолжительность работы логической схемы увеличивается. Однако, существует некоторый оптимизм; например, из-за коллективного характера ЯМР-технологий можно получать результат при достижении ***различимой большей части*** молекул правильного конечного состояния. Тем самым, создание эффективно чистого состояния не является необходимым. Оптическая накачка и различные методы охлаждения также могут использоваться для начальной поляризации рабочего образца, для увеличения амплитуды сигнала, поскольку при низких температурах $Z \approx 1$. Квантовые вычисления явно обрисовывают интересные и нужные сложные экспериментальные задачи будущего.

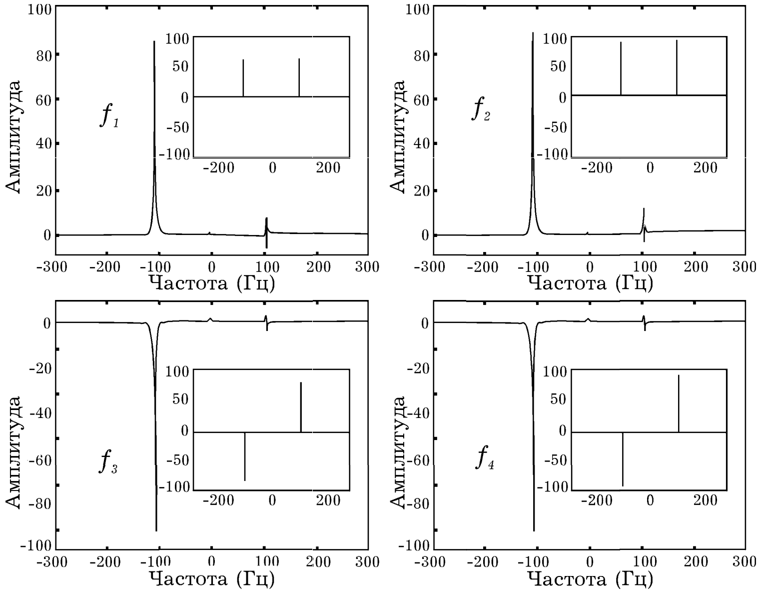

Рис. 2. Спектр протона после исполнения D–J алгоритма и единственного считывающего импульса X_A с эффективно чистым начальным состоянием $|00\rangle$ и с тепловым начальным состоянием [на вставке]. Низкие (высокие) частотные линии соответствуют переходам $|00\rangle \leftrightarrow |10\rangle$ $(|01\rangle \leftrightarrow |11\rangle)$. Частота — 499755169 Гц, а амплитуда дана в произвольных единицах. Спектр есть фурье-образ времени изменения напряжения $V(t)$, индуцируемого в катушке из-за прецессии спина A вокруг $-\mathbf{B}_0$ с частотой ω_A после считывающего импульса X_A. $V(t)$ есть $V(t) \approx V_0\,\mathrm{Tr}\,[e^{-i\widehat{\mathcal{H}}t} e^{-i\frac{\pi}{2}\widehat{I}_x}\rho(0)e^{i\frac{\pi}{2}\widehat{I}_x} e^{i\widehat{\mathcal{H}}t} \times (-i\widehat{\sigma}_{xA}\widehat{\sigma}_{yA})]$, где $\widehat{\sigma}_{\{x,y\}}$ — матрицы Паули, а $\rho(0)$ — матрица плотности состояния непосредственно перед считывающим импульсом. В соответствии с этим, спектральная линия для спина A действительна и положительна (отрицательна), когда спин A — $|0\rangle$ $(|1\rangle)$ непосредственно перед считывающим импульсом X_A. Эксперимент был выполнен в Стэнфордском университете с использованием магнита 11.7 Tesla Oxford Instruments и спектром типа Varian UNITY *Inova* с тройной резонансной проверкой. ^{13}C-меченый $CHCl_3$ был получен в Кембриджской изотопной лаборатории (Cambridge Isotope Laboratories, Inc.) [CLM-262].

Заметим, что в при подготовке этой статьи мы узнали о похожем эксперименте Дж. А. Джонса и М. Моски в Оксфордском университете [26].

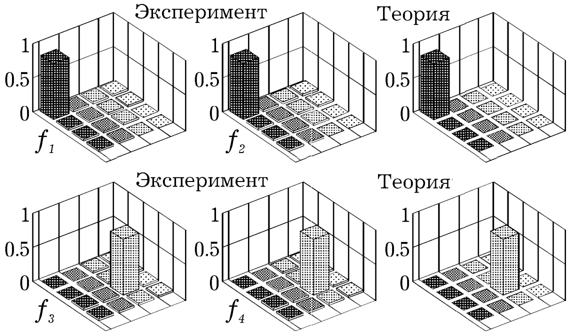

Рис. 3. Экспериментально измеренная и теоретически ожидаемая матрица плотности отклонений после выполнения D–J алгоритма. Диагональные элементы представляют собой нормированную заселенность состояний $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ и $|11\rangle$ (слева направо). Недиагональные элементы представляют взаимосвязь между разными состояния. Амплитуды показаны с реальными знаками компонент; все мнимые компоненты были малы. Матрица плотности отклонений была получена интегрально от спектральных линий протона и углерода, полученных в 9 экспериментах с различным считывающими импульсами для каждого спина (томография квантового состояния [24]). Наблюдаемые экспериментальные недостатки могут быть оценены следующим образом. В экспериментах нормированная заселенность чистых состояний (в идеальном случае равная 1) варьировалась от 0.998 до 1.019. Другие элементы матрицы плотности отклонений (в идеальном случае 0) были по величине меньше 0.075. Относительная ошибка ε для экспериментальной матрицы плотности ρ_{exp} для чистых конечных состояний, определенная как $\varepsilon = \| \rho_{exp} - \rho_{theory} \| / \| \rho_{theory} \|$, варьировалась между 8 и 12% .

Благодарности

Мы благодарны Алексу Пайнесу и Марку Кубинеку за полезные обсуждения. Эта работа была поддержана DARPA при инициативе NMRQC. Л.В. признателен Francqui Fellowship Бельгийского Американского Образовательного Фонда и Yansouni Family Fellowship.

Адрес для корреспонденции: ichuang@almaden.ibm.com

Литература

[1] D.Deutsch. *Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer*, Proc. R. Soc. Lond., A, **400**, 97–117 (1985).

[2] P. Shor. *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*, Proc. 35^{th} Ann. Symp. on Found. of Computer Science (IEEE Comp. Soc. Press, Los Alomitos, CA, 1994) 124–134.

[3] D. P. DiVincenzo. *Quantum computation.* Science **270**, 5234, 255–261 (1995).

[4] S. Lloyd. *Quantum-mechanical computers.* Scientific American **273**, 44–50 (Oct. 1995).

[5] A. Ekert and R. Jozsa. *Quantum computation and Shor's factoring algorithm.* Rev. of Mod. Physics **68**, 3, 733–753 (1996).

[6] D. Deutsch and R. Jozsa. *Rapid solution of problems by quantum computation.* Proc. R. Soc. Lond., A **439**, 553–558 (1992).

[7] D. Simon. *On the power of quantum computation.* Proc. 35^{th} Ann. Symp. on Found. of Computer Science (IEEE Comp. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1994) 116–123.

[8] L. K. Grover. *Quantum computers can search arbitrarily large databases by a single query.* Phys. Rev. Lett. **79**, 23, 4709–4012 (1997).

[9] W. G. Unruh. *Maintaining coherence in quantum computers.* Phys. Rev. A **51**, 2, 992–997 (1995).

[10] I. L. Chuang, R. Laflamme, P. Shor, W. H. Zurek. *Quantum computers, factoring, and decoherence.* Science **270**, 5242, 1633–1635 (1995).

[11] R. Landauer. *Dissipation and Noise Immunity in Computation and Communication.* Nature, Vol. **335**, 779–784 (1988).

[12] R. Landauer. *Is Quantum Mechanics Useful?* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **335**, 367–376 (1995).

[13] G. M. Palma, K.-A. Suominen and A. K. Ekert. *Quantum Computers and Dissipation.* Proc. R. Soc. Lond., A, **452**, 567–584 (1996).

[14] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, D. J. Wineland. *Demonstration of a fundamental quantum logic gate.* Phys. Rev. Lett. **75**, 25, 4714–4717 (1995).

[15] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, H. J. Kimble. *Measurement of conditional phase shifts for quantum logic.* Phys. Rev. Lett. **75**, 25, 4710–4713 (1995).

[16] S. Lloyd. *A potentially realizable quantum computer.* Science **261**, 5128, 1569–1571 (1993).

[17] N. Gershenfeld and I. L. Chuang. *Bulk spin-resonance quantum computation.* Science **275**, 5298, 350–356 (1997).

[18] D. G. Cory, M. D. Price, A. F. Fahmy, T. F. Havel. *Nuclear magnetic resonance spectroscopy: an experimentally accessible paradigm for quantum computing.* Physica D, in print; lanl e-print quant-ph/9709001 (1997).

[19] D. G. Cory, A. F. Fahmy, and T. F. Havel. *Ensemble quantum computing by NMR spectroscopy.* Proc. Nat. Acad. Sci. **94**, 1634–1639 (1997).

[20] R. Cleve, A. Ekert, C. Macchiavello and M. Mosca. Proc. R. Soc. Lond., A, **454**, 339–354 (1998); lanl e-print quant-ph/9708016.

[21] C. P. Slichter. *Principles of Magnetic Resonance.* (Springer, Berlin, 1990).

[22] E. Knill, I. L. Chuang and R. Laflamme. *Effective pure states for bulk quantum computation*, to appear in Phys. Rev. A, (1998); lanl e-print quant-ph/9706053.

[23] R. R. Ernst, G. Bodenhausen and A. Wokaun. *Principles of Nuclear Magnetic Resonance in One and Two Dimensions.* (Oxford University Press, Oxford, 1994).

[24] I. L. Chuang, N. Gershenfeld, M. G. Kubinec, D. W. Leung. *Bulk quantum computation with nuclear magnetic resonance: Theory and experiment.* Proc. R. Soc. Lond., A, **454**, 447–467 (1998).

[25] W. S. Warren. *The Usefulness of NMR Quantum Computing.* Science, **277** 1688–1690 (1997).

[26] T. F. Jones, M. Mosca. *Implementation of a Quantum Algorithm to Solve Deutsch's Problem on a Nuclear Magnetic Resonance Quantum Computer.* subm. to J. of Chem. Phys. (1998); lanl e-print quant-ph/9801027.