

# カオスニューラルネットワーク

市瀬夏洋

東京大学大学院 新領域創成科学研究科 合原研究室

東京都文京区本郷 7-3-1

ichinose@sat.t.u-tokyo.ac.jp

## Chaotic Neural Networks

Natsuhiro Ichinose

Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo,

7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo

**Abstract:** Chaotic neural network is a model of neural networks with chaotic neurons, which are modeled with relative refractory and graded response. While the McCulloch - Pitts model and the Nagumo-Sato model have no chaotic response because these models obey “All-or-None Law”, the chaotic neuron model has chaotic response in which it is supposed that a neuron responds to strength of a stimulus continuously in the generating process of an action potential. Since the chaotic neuron model includes some other neuron models as a special case, it is easy to introduce chaotic dynamics into the neural network model applicable to the associative memory or the optimization problem.

**Keywords:** Chaos, Neuron, Neural Network

No. tmd00023

### 1 モデルの概要

カオスニューラルネットワークは、相対不応性および連続的な応答特性を有するカオスニューロンモデルを結合したニューラルネットワークモデルである。「全か無かの法則」に従ってモデル化されていた McCulloch - Pitts モデルや南雲 - 佐藤モデルではカオスの応答は見られなかったが、活動電位の生成過程において連続的に応答が変化するとしたことにより、カオスニューロンモデルではカオスの応答が実現されている。カオスニューロンは、その特殊な場合として従来から用いられてきた複数のニューロンモデルを含むため、連想記憶モデルや最適化問題に応用されているネットワークモデルにおいて素子をカオスニューロンに置き換えることにより、カオスダイナミクスをそれらのネットワークモデルに導入することは容易である。

## 2 変量とパラメータの表

変量	記号
$i$ 番目のニューロンの外部入力に関する内部状態	$\xi_i$
$i$ 番目のニューロンのフィードバック入力に関する内部状態	$\eta_i$
$i$ 番目のニューロンの相対不応性に関する内部状態	$\zeta_i$
$i$ 番目のニューロンの内部状態の和	$y_i$
$i$ 番目のニューロンの出力強度	$x_i$
$j$ 番目の入力強度	$A_j$
時刻	$t$

関数	記号
出力関数	$f$
出力と不応性の関係を表す関数	$g$
出力の伝達特性を表す関数	$h$

パラメータ	記号	値
ニューロン数	$N$	
外部入力数	$M$	
$j$ 番目から $i$ 番目のニューロンへの結合強度	$W_{ij}$	
$j$ 番目の外部入力から $i$ 番目のニューロンへの結合強度	$V_{ij}$	
外部入力に関する内部状態の減衰定数	$k_e$	$0 \leq k_e < 1$
フィードバック入力に関する内部状態の減衰定数	$k_f$	$0 \leq k_f < 1$
相対不応性に関する内部状態の減衰定数	$k_r$	$0 \leq k_r < 1$
$i$ 番目のニューロンの閾値	$\theta_i$	
$i$ 番目のニューロンのバイアス	$a_i$	
相対不応性に関するスケーリングパラメータ	$\alpha$	$\alpha \geq 0$

## 3 式

カオスニューラルネットワークモデルは、次の式によって表される [1][2]。

$$x_i(t+1) = f \left( \sum_{j=1}^M V_{ij} \sum_{s=0}^t k_e^s A_j(t-s) + \sum_{j=1}^N W_{ij} \sum_{s=0}^t k_f^s h(x_j(t-s)) - \alpha \sum_{s=0}^t k_r^s g(x_i(t-s)) - \theta_i \right) \quad (1)$$

ここで、関数  $f$  の引数の各項を次の内部状態変数によって表す。

$$\xi_i(t+1) = \sum_{j=1}^M V_{ij} \sum_{s=0}^t k_e^s A_j(t-s) \quad (2)$$

$$\eta_i(t+1) = \sum_{j=1}^N W_{ij} \sum_{s=0}^t k_f^s h(x_j(t-s)) \quad (3)$$

$$\zeta_i(t+1) = -\alpha \sum_{s=0}^t k_r^s g(x_i(t-s)) - \theta_i \quad (4)$$

これにより、式 (1) は、次のように単純化される (式変形については付録参照)。

$$\xi_i(t+1) = k_e \xi_i(t) + \sum_{j=1}^M V_{ij} A_j(t) \quad (5)$$

$$\eta_i(t+1) = k_f \eta_i(t) + \sum_{j=1}^N W_{ij} h(x_j(t)) \quad (6)$$

$$\zeta_i(t+1) = k_r \zeta_i(t) - \alpha g(x_i(t)) - (1 - k_r) \theta_i \quad (7)$$

$$x_i(t+1) = f(\xi_i(t) + \eta_i(t) + \zeta_i(t)) \quad (8)$$

すなわち、式 (1) では、時刻 0 から  $t$  までの、それぞれの状態の減衰和によって次の状態が決定されていたのに対して、式 (5-8) では、現在の内部状態のみによって次の状態が決定される。

また、 $y_i(t) = \xi_i(t) + \eta_i(t) + \zeta_i(t)$  とし、入力は一時間に一定 ( $A_j(t) = A_j$ )、それぞれの内部状態に対する減衰定数は一様 ( $k_e = k_f = k_r = k$ )、 $\sum_{j=1}^M V_{ij} A_j - \theta_i(1 - k) = a_i$  とおくと、式 (5-8) は、以下のように表される。

$$y_i(t+1) = k y_i(t) - \alpha g(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N W_{ij} x_j(t) + a_i \quad (9)$$

$$x_i(t+1) = f(y_i(t+1)) \quad (10)$$

さらに、ニューロン間の結合はなし ( $W_{ij} = 0$ ) とし、ニューロン番号に関するインデックスを消去すると式 (9-10) は以下となる。

$$y(t+1) = k y(t) - \alpha g(f(y(t))) + a \quad (11)$$

$$x(t+1) = f(y(t+1)) \quad (12)$$

式 (11-12) は単一ニューロンのモデルであり、カオスニューロンモデルと呼ばれる。

シミュレーションでは、関数  $g$  および  $h$  は恒等関数、

$$g(x) = x \quad (13)$$

$$h(x) = x \quad (14)$$

関数  $f$  はロジスティック関数、

$$f(y) = \frac{1}{1 + \exp(-y/\epsilon)} \quad (15)$$

がしばしば用いられる。

## 4 検証結果

### 4.1 カオスニューロンモデルの分岐図

単一ニューロンモデルである式 (11-12) について、分岐パラメータをバイアス  $a$  とした場合の分岐図を図 1 に示す。ここで、関数  $g$  は恒等関数とし、出力関数  $f$  はロジスティック関数とした。 $\rho$  は、入力数に対するニューロンの発火率を表す興奮数であり、

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} h(x(t)) \quad (16)$$

と表される。出力  $x$  が 0.5 以上の場合に発火状態にあるとして、関数  $h$  は、

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0.5 \\ 0 & x < 0.5 \end{cases} \quad (17)$$

とした。

また、 $\lambda$  は、軌道における微小摂動に対する拡大率に対応するリアプノフ指数であり、

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \log_2 \left| \frac{dy(t+1)}{dy(t)} \right| \quad (18)$$

と表される。 $\lambda > 0$  の場合、初期値に対する鋭敏な依存性を有するという意味で、ニューロンの応答はカオス的である。

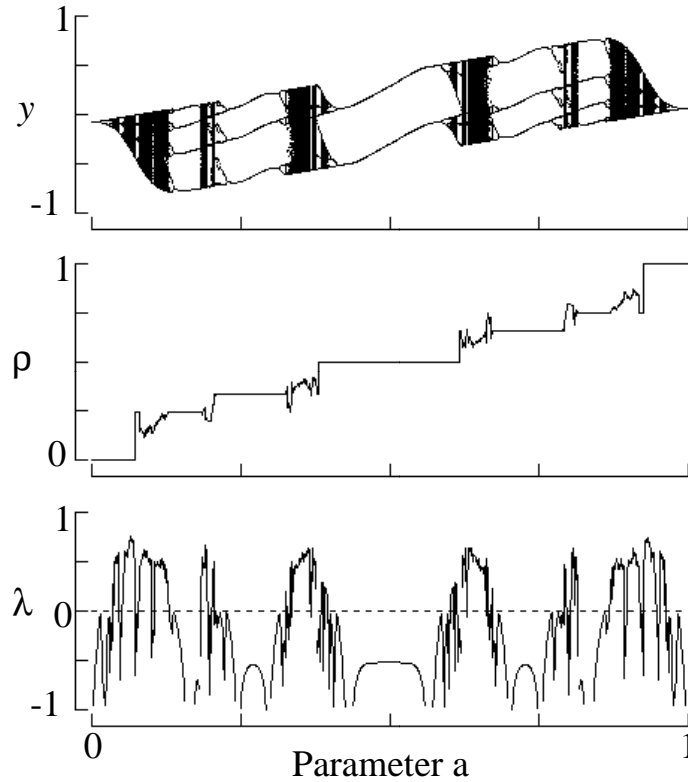


図 1 Bifurcation diagram for the bias parameter  $a$ . ( $k = 0.7$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\epsilon = 0.02$ )

## 4.2 ネットワークのダイナミクス

図 2に、式 (9-10) を用いて、2つのニューロンを結合したネットワークでの内部状態のアトラクタを示す。関数  $g$  および  $h$  は恒等関数、関数  $f$  はロジスティック関数とした。ネットワークにおいても、カオス的挙動を示すことがわかる。

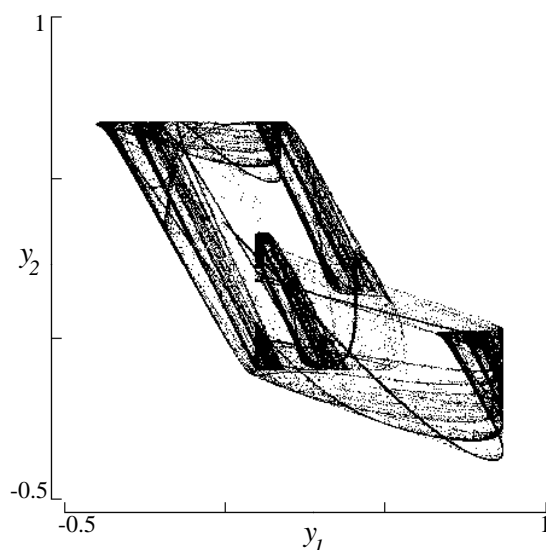


図 2 Attractor in the internal state by mutually connected two neurons( $k = 0.8$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\epsilon = 0.03$ ,  $W_{11} = W_{22} = 0$ ,  $W_{12} = 0.5$ ,  $W_{21} = 0.31$ ,  $a_1 = a_2 = 0.48$ )

## 参考文献

- [1] K. Aihara, T. Takabe and M. Toyoda (1990): Chaotic Neural Networks, Physics Letters A, Vol. 144, 6, 7, pp. 333-340
- [2] 合原一幸編著 (1990): カオス — カオス理論の基礎と応用、サイエンス社
- [3] W. S. McCulloch and W. H. Pitts (1943): A Logical Calculus of the ideas immanent in neural nets, Bull. Math. Biophys., Vol. 5, pp. 115-133
- [4] J. Nagumo and S. Sato(1972): On a Response Characteristic of a Mathematical Neuron Model, Kybernetik, Vol. 10, pp. 155-164

## 付録 — 内部状態の式変形について

内部状態の式 (2-4) から式 (5-8) への式変形について述べる。各内部状態  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  は次の形式で書くことができる。

$$v(t+1) = \sum_{s=0}^t k^s I(t-s) + b \quad (19)$$

ここで、各内部状態  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  に対してそれぞれ、

$$v(t+1) = \xi_i(t+1), \quad I(t) = \sum_{j=1}^M V_{ij} A_j(t), \quad k = k_e, \quad b = 0 \quad (20)$$

$$v(t+1) = \eta_i(t+1), \quad I(t) = \sum_{j=1}^N W_{ij} h(x_j(t)), \quad k = k_f, \quad b = 0 \quad (21)$$

$$v(t+1) = \zeta_i(t+1), \quad I(t) = -\alpha g(x_i(t)), \quad k = k_r, \quad b = -\theta_i \quad (22)$$

である。現在の状態  $v(t)$  は、

$$v(t) = \sum_{s=0}^{t-1} k^s I(t-s-1) + b \quad (23)$$

であるので、これより、

$$v(t+1) = I(t) + \sum_{s=1}^t k^s I(t-s) + b \quad (24)$$

$$= I(t) + \sum_{q=0}^{t-1} k^{q+1} I(t-q-1) + b \quad (q = s-1) \quad (25)$$

$$= I(t) + k(v(t) - b) + b \quad (26)$$

$$= kv(t) + I(t) + b(1-k) \quad (27)$$

となる。式 (27) に式 (20-22) を代入することにより、内部状態の式 (5-8) を得る。